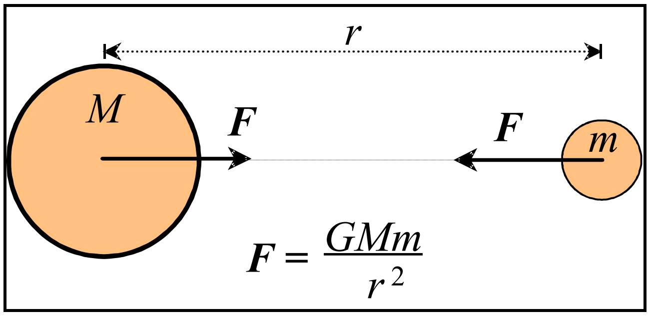
La courbure de l'espace-temps

par Alain Bonnier, D.Sc. (physique)

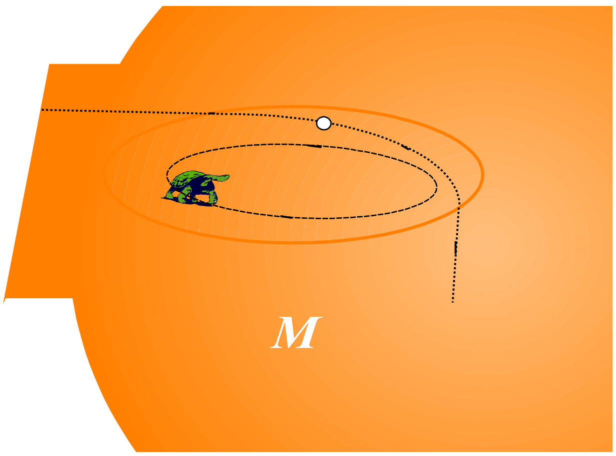
1. La gravitation



Selon la théorie gravitationnelle de Newton, tous les objets s'attirent avec une force ***F*** proportionnelle au produit $M \times m$ de leur masse et en fonction inverse du carré de leur distance r.

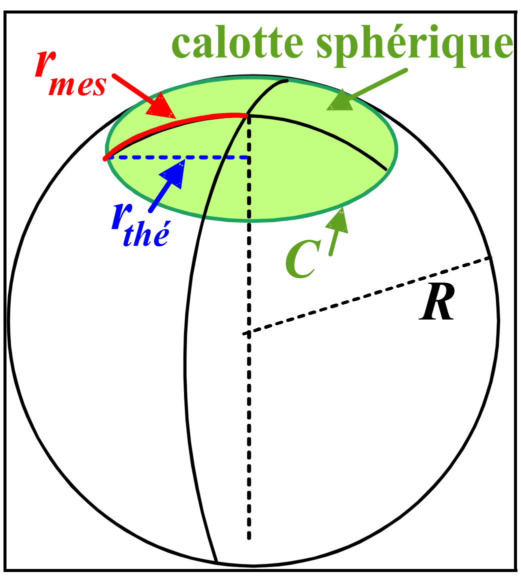
$$F = \frac{GMm}{r^2} \qquad \text{(Éq. 1)}$$

C'est cette force gravitationnelle qui explique la chute d'une pomme, le mouvement des planètes, des satellites, des galaxies, etc.



Einstein a présenté en 1916 une autre interprétation de la gravitation : L'**espace-temps** est **courbé** par la matière. Et les objets qui se déplacent en « ligne droite » dans cet espace courbe suivent une trajectoire qui est elle-même courbe. Un peu comme l'exemple ci-contre d'une membrane de caoutchouc déformée par une masse placée en son centre. La tortue sur cette membrane croit se déplacer en ligne droite en plaçant une patte devant l'autre. Elle décrit en fait une trajectoire courbe. De même pour la bille blanche ci-contre qui décrit une "ligne droite" mais dont la trajectoire est déviée par la courbure de la membrane.

2. La courbure d'un espace à deux dimensions



Pour mieux comprendre ce qu'on entend par "courbure de l'espace-temps", regardons d'abord le cas plus simple d'un espace courbe à deux dimensions comme la calotte sphérique ci-contre.

Un habitant vivant sur cet espace et qui voudrait vérifier si son espace est courbe ou plat pourrait y arriver de la façon suivante : À l'aide d'une longue corde fixée en un point, il trace un cercle de circonférence C. Sachant que la circonférence d'un cercle C est théoriquement égale à 2π fois son rayon, il en déduit que

$$r_{thé} = C/2\pi. \qquad \text{(Éq. 2)}$$

À sa grande surprise, quand il compare cette valeur avec la longueur de sa corde dont la longueur mesurée est r_{mes} et qui lui a servi de rayon, il constate que r_{mes} n'est pas égal à $r_{thé}$! Il devra en conclure que son espace est courbe et que la différence $\Delta r = (r_{mes} - r_{thé})$ est une mesure de la courbure de son espace. (Il peut même calculer le rayon de courbure R de son espace par la relation $R \approx \sqrt{r_{mes}^3 / 6\Delta r}$.)

3. La courbure d'un espace à trois dimensions

Dans le cas d'un espace à trois dimensions, il est plus difficile d'imaginer comment il peut être courbé. Mais on peut quand même définir cette courbure en procédant par analogie avec notre espace à deux dimensions. Pour ce faire, on reprend une corde de longueur r_{mes} fixée en un point. Mais au lieu de tracer un cercle *C,* on trace une sphère *S.* Puis au lieu de mesurer la circonférence *C* du cercle, on mesure la surface *S* de la sphère. Sachant que la surface *S* d'une sphère est égale à 4π fois son rayon au carré, on en déduit que $r_{thé} = \sqrt{S/4\pi}$. En comparant cette valeur $r_{thé}$ avec r_{mes} (la longueur mesurée de la corde qui nous a servi de rayon), on peut vérifier comme dans le cas précédant si notre espace est courbe ou non. La différence $\Delta r = (r_{mes} - r_{thé})$ est encore ici une mesure de la courbure de notre espace à trois dimensions.

4. L'espace est courbe

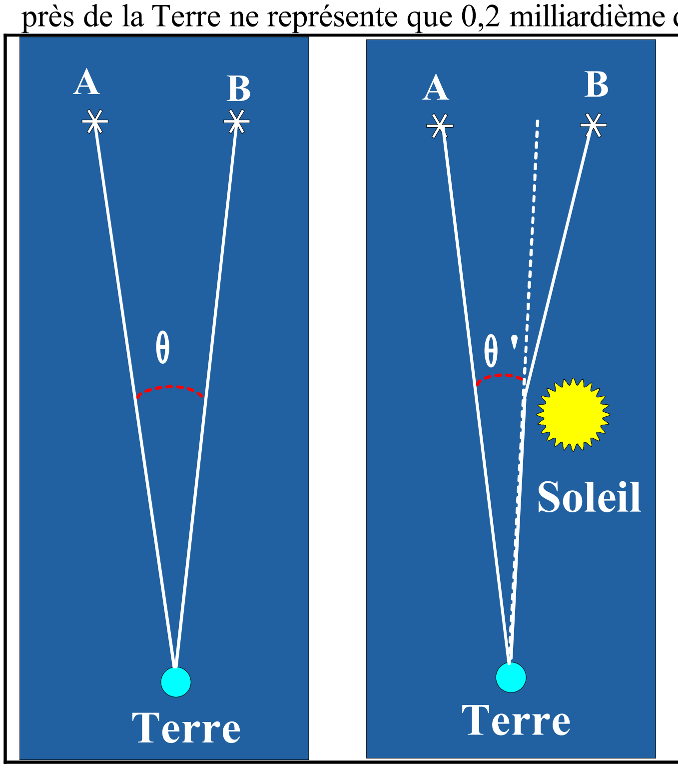
Maintenant, la "question qui tue" : Est-ce vrai ? L'espace à trois dimensions dans lequel nous vivons est-il réellement courbe ? Plusieurs personnes (dont le physicien Carl Gauss entre autres au XIX[è] siècle) ont essayé de mesurer cette courbure près de la Terre mais sans succès. C'est parce que cette courbure est très faible.

En réfléchissant sur la gravitation, Einstein proposa l'idée que **la matière courbe l'espace**. Selon ses calculs, près d'un objet de masse *M,* la différence Δr entre le rayon mesuré et le rayon théorique est

$$\Delta r = \left(\frac{G}{3c^2}\right) M \qquad \text{(Éq. 3)}$$

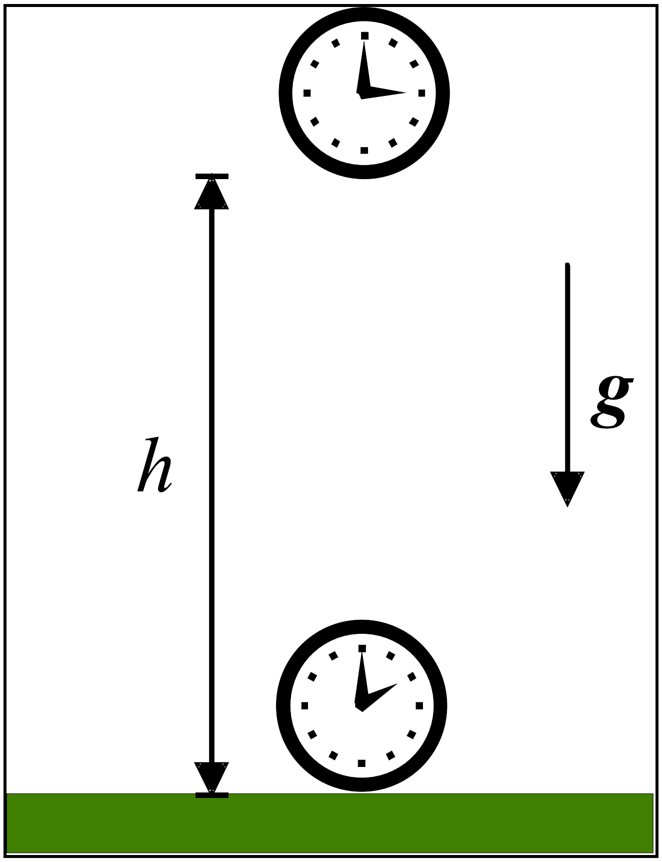
où G est la constante gravitationnelle ($6{,}67 \times 10^{-11}$ m^3/kg-s^2) et c la vitesse de la lumière (3×10^8 m/s).

Près de la surface de la Terre, par exemple, dont la mass M est de $5{,}98 \times 10^{24}$ kg, on obtient un Δr égal à 1,5 mm. Comparé au rayon de la Terre qui est de $6{,}38 \times 10^6$ m, on voit que la courbure de l'espace près de la Terre ne représente que 0,2 milliardième du rayon terrestre.



Le Soleil, par contre, a une masse 330 000 fois supérieure à la Terre et présente une différence Δr de 495 m. Par rapport à son rayon (qui est 109 fois supérieur à la Terre), cela représente une courbure de 71 milliardième. On a pu mesurer cette courbure de l'espace près du Soleil lors de l'éclipse de 1919 en observant la déviation (la différence entre θ et θ' dans la figure ci-contre) de la lumière stellaire passant près de sa surface. Cette déviation d'à peine 1,75 seconde d'arc (1 seconde d'arc correspond à 1/3600 de degré) prédite par Einstein a été mesurée avec une précision de 0,10 seconde d'arc. (Le deuxième plus gros corps du système solaire, Jupiter, produirait une déviation d'à peine 0,02 seconde d'arc. Déviation trop faible pour avoir été observée jusqu'à maintenant.)

5. L’écoulement du temps dans un champ gravitationnel



En 1905, Einstein a démontré que le temps ne s’écoulait pas au même rythme pour deux observateurs se déplaçant à une vitesse constante relative. Si v est la vitesse d’un observateur B par rapport à A et si le temps écoulé pour A est Δt_0, alors le temps écoulé pour B est

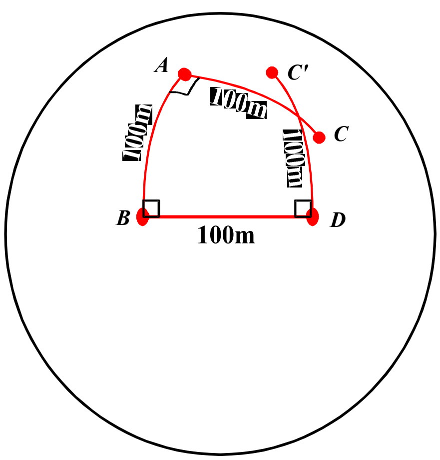
$$\Delta t_v = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad . \qquad \text{(Éq. 4)}$$

Et si $v << c$, alors $\Delta t_v \approx \Delta t_0 (1 + v^2/2c^2)$.

En analysant le comportement des horloges dans une fusée ayant une accélération g, Einstein a pu démontrer également que le temps s’écoulait plus rapidement à l’avant qu’à l’arrière. Il postula qu’il devait en être de même dans un champ gravitationnel d’accélération g : Une horloge située à une hauteur h dans un champ où l’accélération gravitationnelle est g, avancera plus rapidement qu’une horloge située au sol, selon la relation :

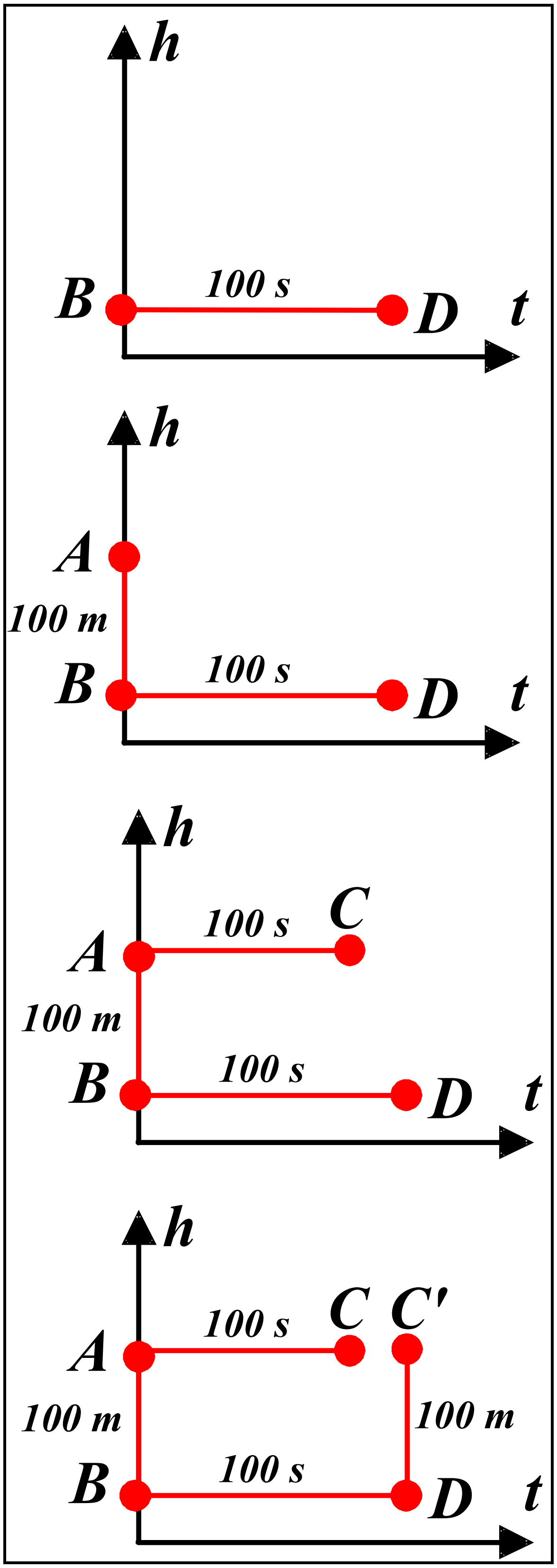
$$\Delta t_h \approx \Delta t_0 (1 - gh/c^2) \qquad \text{(Éq. 5)}$$

6. L’espace-temps est courbe



Une autre façon de vérifier la courbure d’un espace consiste à dessiner des figures géométriques comme des triangles ou des rectangles. Par exemple, si on essaye de dessiner un carré sur une surface plate, les quatre coins se rejoignent. Par contre, si on essaye de dessiner un carré sur une surface courbe, telle une sphère par exemple, on constate qu’on ne peut dessiner quatre côtés égaux ayant des coins à angle droit. En effet, si on trace une droite *BD*, puis une autre droite *BA* perpendiculaire à la première, puis une droite *AC* perpendiculaire à *AB,* puis finalement une quatrième droite *DC’* perpendiculaire à BD, les points *C* et *C’* ne coïncident pas.

Dans la théorie de la Relativité, l’espace et le temps sont intimement liés. Ils forment un continuum “espace-temps” à quatre dimensions : trois dimensions spatiales et une dimension temporelle. Si l’espace est courbé par la matière, il aurait été étonnant que l’espace-temps dans son ensemble ne le soit pas également.



Pour vérifier si l'espace-temps est vraiment courbe, nous allons essayer de dessiner un rectangle dans l'espace-temps près de la Terre. Si les quatre côtés du rectangle se rejoignent, on en déduira que l'espace-temps est plat. Sinon il faudra en conclure qu'il est courbe.

Fixons d'abord un référentiel comportant un axe temporel t horizontal et un axe spatial h vertical.

Plaçons ensuite notre crayon sur une feuille de papier au point B et attendons 100 secondes jusqu'à ce qu'il soit rendu au point D. On vient de tracer une droite BD dans le temps !

Remettons notre crayon au point B puis traçons (rapidement ! je dirais même "instantanément", pour ne pas se déplacer dans le temps...) une droite verticale de 100 mètres jusqu'au point A. Nous venons ainsi de dessiner les deux premiers côtés de notre rectangle.

On pose maintenant notre crayon au point A, et on attend 100 secondes jusqu'à ce qu'il soit rendu au point C.

On revient ensuite au point D, d'où on élève une droite de 100 mètres jusqu'au point C'.

Surprise ! Les points C et C' ne coïncident pas ! Pourquoi ? Parce que les droites temporelles BD et AC n'ont pas la même longueur. Rappelez-vous, le temps s'écoule plus rapidement au point A à 100 mètres d'altitude qu'au point B situé à 0 mètre. La droite AC est donc plus courte que la droite BD par une quantité égale à $\Delta t_0 gh/c^2$. Sur la Terre où l'accélération gravitationnelle g est égale à 9,8 m/s^2, il manquerait donc dans notre exemple une picoseconde (10^{-12} seconde ou un millième de milliardième de seconde) à la droite AC pour égaler la droite BD.

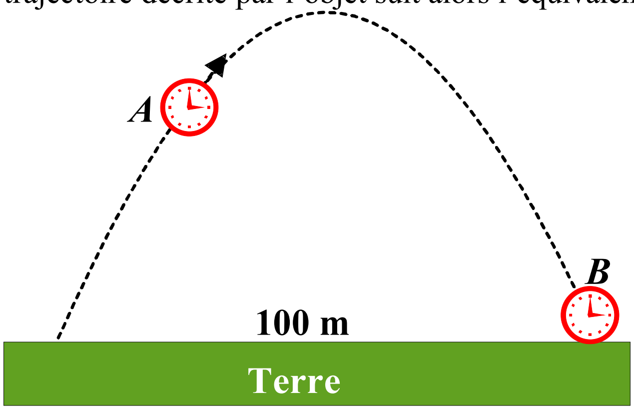
Comme les points C et C' ne coïncident pas, on en déduit que notre espace-temps doit effectivement être courbe près de la Terre.

7. Le mouvement dans un espace-temps courbe

La description du mouvement dans l'espace-temps suit une règle toute simple, analogue à la règle qui dit que “la droite est le chemin le plus court entre deux points” :

Un objet (en mouvement “libre” dans l'espace-temps) se déplace toujours suivant une trajectoire dont le *temps propre* est le plus long.

(Par *temps propre* on entend par-là le temps mesuré par une horloge qui serait fixée à l'objet. La trajectoire décrite par l'objet suit alors l'équivalent d'une *ligne géodésique* dans l'espace-temps.)



Pour voir ce que cela signifie, considérons ce petit jeu. On a deux horloges identiques *A* et *B* situées au sol à une certaine distance l'une de l'autre (disons 100 m). (Il nous faut des horloges précises à l'attoseconde près pour faire l'expérience ! Une attoseconde égale 10^{-18} seconde ou un milliardième d'un milliardième de seconde !)

On veut lancer l'horloge *A* de façon à ce qu'elle atteigne l'horloge *B* en 100 s (tel que mesuré par l'horloge *B*). Comment doit-on lancer cette horloge *A* pour que le temps qu'elle indiquera à son arrivée au point *B* soit le plus long possible ?

Si on lance l'horloge *A* en ligne droite vers l'horloge *B* à la vitesse v = 1 m/s (pour simplifier les calculs, nous négligerons ici la friction de l'air), l'horloge *B* indiquera 100 s à son arrivée mais l'horloge *A,* elle, indiquera un temps un peu plus court en vertu de l'Éq. 4 puisqu'elle était en mouvement. Plus précisément, elle indiquera 100 secondes **moins** 172 femtosecondes (ou 172×10^{-15} seconde). Peut-on faire mieux ? Y a-t-il une trajectoire qui permettrait à l'horloge *A* d'atteindre l'horloge *B* en 100 secondes dans le *temps propre* de *B* tout en indiquant elle-même un *temps propre* supérieur ?

On a vu à l'Éq.5 que le temps s'écoule plus rapidement plus haut dans un champ gravitationnel. En lançant l'horloge *A* vers le haut de façon à ce qu'elle passe du temps en altitude, elle devrait normalement indiquer un temps supérieur. Dans le cas présent, si on lance l'horloge *A* avec une vitesse initiale v_0 = 490 m/s formant un angle de 89,88° avec la verticale, la trajectoire qui maximisera le *temps propre* de l'horloge *A* est une trajectoire parabolique qui atteindra 12 250 m en altitude (toujours en négligeant la friction de l'air). Et arrivée au point *B,* l'horloge *A* indiquera alors un temps de 100 secondes **plus** 33 picosecondes (ou 33×10^{-12} seconde). Aucune autre trajectoire ne peut donner un *temps propre* supérieur.

Il n'est donc plus nécessaire d'invoquer une force pour expliquer le mouvement d'un objet dans un champ gravitationnel. **La notion de courbure de l'espace-temps** alliée au **principe du chemin ayant le plus long *temps propre*** suffisent. Et elles ont permis également d'expliquer certains mouvements (comme la précession de l'orbite de Mercure) qui étaient restés un mystère dans la théorie de Newton.

Bibliographie

1. *Lectures on Physics,* Volume II, Richard Feynman, Addison-Wesley, 1964, chap. 42.
2. *Gravitation and Cosmology,* Steven Weinberg, Wiley, 1972, 657 p.
3. *Astronomie & astrophysique,* Marc Séguin, Benoît Villeneuve, Éditions du RP 1995, 550 p.

Appendice

Dans la théorie de la **Relativité générale** d'Einstein**,** la courbure de l'espace-temps est décrite par **l'Équation du champ gravitationnel** :

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de courbure de l'espace-temps,
$g_{\mu\nu}$ le tenseur métrique
et $T_{\mu\nu}$ le tenseur de densité d'énergie (ou de densité massique puisque $E = mc^2$).

Et le principe à l'effet qu'une particule suit une trajectoire dans l'espace-temps ayant le plus long temps propre, s'exprime mathématiquement par **l'Équation du mouvement d'une particule** :

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0}$$

où $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left[\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho} \right]$ est la “connexion affine”,
$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (-ict, x, y, z)$ est le quadrivecteur de position spatio-temporelle
et τ le temps propre.

Dans un champ gravitationnel constant g et pour des vitesses $v << c$, ce principe peut également s'exprimer ainsi : De toutes les trajectoires possibles, une particule de masse m suivra la trajectoire $y(x)$ pour laquelle la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{mc^2} \int \left[mgy - \frac{1}{2} mv^2 \right] dt \qquad \text{est maximale.}$$